

## Aplicação de controle na planta didática para estudo de controle: Viga Bola

Leonardo Helliham de S. Ferreira, Diogo Ramalho de Oliveira, Marcus Felipe Calori Jorgetto

Instituto Federal de Mato Grosso do Sul - Três Lagoas-MS

lhelliham@gmail.com, diogo.ramalho@ifms.edu.br, marcus.jorgetto@ifms.edu.br

### Resumo

O trabalho apresenta a implementação prática de um método de controle a partir da teoria clássica de controle utilizando PID por alocação de polos, com o objetivo de desenvolver uma planta didática para estudo do controle de processos, o estudo será o controle da posição de uma bola sobre uma viga, podendo variar sua posição em apenas um eixo, mesmo com a interação de forças externas. Para que seja feita a correção da posição da bola no sistema foi feito a programação de um código na plataforma Arduino usando um controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), o sistema de controle projetado é um sistema de malha fechada, onde um sensor infravermelho determina a posição da bola para que seja feita a realimentação do sistema com um valor de correção, desta forma a bola se movimenta em direção à posição desejada.

**Palavras-chave:** Alocação de polos, Arduino, Controle realimentado, PID.

### Introdução

A ciência teve um desenvolvimento notório nos últimos anos, mas principalmente na área da engenharia com muitos avanços e conquistas. A Automação e o Controle tem sido indispensável em relação a inovação e desenvolvimento quando tratado de processos industriais, automobilísticos, mecânica, aeronáutica e aeroespacial. As técnicas de controle já provaram sua real importância nessas áreas e têm evoluído cada vez mais. Mediante a necessidade de controlar sistemas mais complexos, já que estes mesmos podem ser variantes e invariantes no tempo, lineares ou não lineares, como também terem múltiplas entradas e saídas.

Esta pesquisa apresenta a implementação de um método de controle no sistema viga bola, com o objetivo de controlar a posição da esfera sobre uma viga que possui um movimento angular, causado por um atuador (servo motor). Para que haja o controle do sistema foi projetado um controlador na plataforma Arduino. O controlador possui um ganho, que realimenta o sistema para que o torne estável.

A técnica aplicada para determinar os ganhos dos controladores é alocação de pólos.

### Metodologia

O diagrama que descreve esse sistema é composto por duas partes, sendo elas: o atuador que converte os sinais elétricos em movimento mecânico (neste caso foi utilizado

um servo motor) e a planta (viga e bola), conforme descrito na Fig. 1.

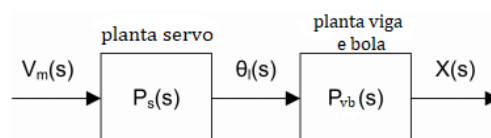


Figura 1. Diagrama de blocos de malha aberta viga bola.

Deste modo, a função de transferência do viga e bola esboça o deslocamento da posição da bola,  $X(s)$ , em função do ângulo  $\theta(s)$  do servo motor. A função de transferência do servo motor modela o ângulo do servo,  $\theta(s)$ , que varia de acordo com a tensão de entrada  $V_m(s)$ .

Para obter a função de transferência completa desse sistema é necessário realizar o produto da função de transferência do servo motor com a do viga e bola, com descrito em (1).

$$P(s) = P_{vb}(s) P_s(s) \quad (1)$$

onde,  $P(s)$ ,  $P_{vb}(s)$  e  $P_s(s)$  representam respectivamente as funções de transferência da planta completa, do viga bola e do servo motor [1], [2].

Entretanto, na prática o controle do servo motor já possui sua realimentação e controle independentes, nesta situação podemos desprezar o efeito do servo motor.

O modelo matemático do sistema viga-bola é equivalente ao modelo do movimento de um corpo em um plano inclinado como descrito na Fig. 2 [2], [3].

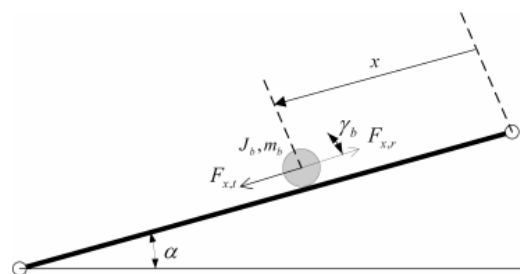


Figura 2. Diagrama das forças atuantes na viga e bola.

As forças que atuam sobre a bola podem ser escritas em (2).

$$F = m_b \frac{d^2 X(t)}{dt^2} \quad (2)$$

onde:  $m_b$  é a massa da bola e  $x(t)$  é a posição da bola.

São duas forças que atuam na bola uma delas representada por  $F_{x,r}$  a força da inércia da bola e  $F_{x,t}$  a força de translação gerada pela ação da gravidade sobre a bola. Portanto substituindo em (2) tem-se (3).

$$F_{x,t} - F_{x,r} = m_b \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (3)$$

Desta forma para que a bola fique em equilíbrio, ou seja, em repouso a força de translação e a força da inércia devem ser iguais.

As forças de inércia e de translação podem ser descritas das seguintes formas, como descrito em (4) e (5).

$$F_{x,r} = \frac{J_b (d^2 X(t). dt^2)}{r_b^2} \quad (4)$$

$$F_{x,t} = m_b g \sin(\alpha(t)) \quad (5)$$

onde:  $J_b$  é o momento de inércia da bola,  $x(t)$  é a posição da bola,  $r_b$  é o raio da bola,  $m_b$  é a massa da bola,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\alpha$  o ângulo de inclinação do viga bola.

Substituindo (4), (5) em (3), pode-se dizer que a aceleração linear da bola é dada por (6).

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = \frac{m_b g \sin(\alpha(t)) r_b^2}{m_b r_b^2 + J_b} \quad (6)$$

Para determinar a relação entre o ângulo do servo motor e o ângulo da viga, é utilizado a relação entre triângulos na Fig. 3 e apresentado em (7).

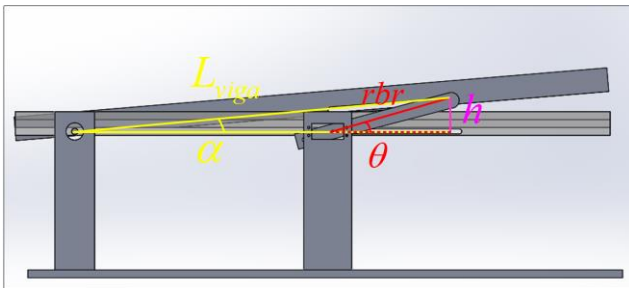


Figura 3. Decomposição dos ângulos  $\alpha$  e  $\theta$ .

$$\sin(\alpha(t)) = \frac{\sin(\theta(t)) r_{br}}{L_{viga}} \quad (7)$$

onde,  $r_{br}$  é o raio do braço do servo,  $L_{viga}$  é o comprimento da viga e  $\theta$  o ângulo do servomotor.

O ângulo do servomotor está variando de  $\pm 7^\circ$  graus, uma variação muito pequena, então podemos considerar  $\theta(t) \approx \sin(\theta(t))$ . Substituindo-o juntamente com (7) em (6) obtém-se (8).

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = \frac{m_b g \theta(t) r_{br} r_b^2}{L_{viga} (m_b r_b^2 + J_b)} = K_{bb} \theta(t) \quad (8)$$

onde,  $K_{bb}$  é uma constante que define todas as grandezas constantes de (8) em um único componentes.

Aplicando a transformada de Laplace na função de transferência na planta viga e bola em (8), obtém-se a função de transferência do sistema viga bola ( $P_{vb}(s)$ ) em (9).

$$P_{vb}(s) = \frac{K_{bb}}{s^2} \quad (9)$$

A alocação de polos utilizou a controlador PID representado por  $C(s)$  em (10) [1], [4].

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (10)$$

onde,  $C(s)$  representa o controlador,  $K_p$  o ganho do controlador proporcional,  $K_i$  o ganho do controlador integrador e  $K_d$  o ganho do derivador.

Combinando o controlador PID com a planta dada em (9) e realizando sua realimentação conforme Fig. 4, obtém-se (11) dada pela função de transferência  $T(s)$ .

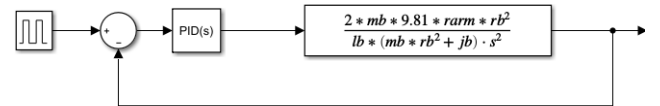


Figura 4. Circuito realimento do viga bola.

$$T(s) = \frac{K_{bb} (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 + K_{bb} K_d s^2 + K_{bb} K_p s + K_i K_{bb}} \quad (11)$$

O denominador (11) é de terceira ordem, e quando comparada com a equação característica de terceira ordem na forma expandida (12), pode ser encontrado os ganhos do controlador, conforme (13)-(15).

$$s^3 + (2\xi\omega_n + p_o)s^2 + (2\xi\omega_n p_o + \omega_n^2)s + \omega_n^2 p_o = 0 \quad (12)$$

$$K_p = \frac{2\xi\omega_n p_o + \omega_n^2}{K_{bb}} \quad (13)$$

$$K_i = \frac{\omega_n^2 p_o}{K_{bb}} \quad (14)$$

$$K_d = \frac{(2\xi\omega_n + p_o)}{K_{bb}} \quad (15)$$

onde,  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento,  $\omega_n$  a frequência natural não amortecida e  $p_o$  o inverso da constante de decaimento do polo.

## Resultados e Discussão

No controlador PID, o polo responsável pela constante de decaimento  $p_o$  não pode ser zero, portanto, é necessário calcular seu valor. Sendo  $T_p$  a constante de decaimento do polo, e adotando-se  $T_p$  igual a 1 segundo em (16) encontra-se o valor de  $P_o$ .

$$p_o = \frac{1}{T_p} = 1 \quad (16)$$

Dada um degrau na referência, o *overshoot* da bola ( $PO$ ) não deve ultrapassar 7,5%. Após 2,5 segundos, a bola deve se estabelecer ( $t_e$ ) dentro de 4% de seu valor de estado estacionário ( $c_{ts}$ ) e o estado estacionário deve estar dentro de 1 mm da posição desejada. Portanto das equações clássicas de controle de tempo de estabelecimento (17) e potencial de *overshoot* (18), pode-se determinar respectivamente os valores do coeficiente de amortecimento e da frequência natural não amortecida, reorganizando e resolvendo (17) e (18) obtendo (19) e (20).

$$t_e = \frac{\ln(c_{ts}\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} \quad (17)$$

$$PO = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (18)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2 PO}{\pi^2 - \ln^2 PO}} = 0,63 \quad (19)$$

$$\omega_n = \frac{\ln(c_{ts}\sqrt{1-\xi^2})}{\xi t_e} = 2,18 \text{ [rad/s]} \quad (20)$$

A constante  $K_{bb}$  é igual 3,7932, considerando os dados da Tabela 1.

Substituindo (19), (20) e a constante  $K_{BB}$  em (13), (14) e (15) obtém-se os valores de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  apresentados na Tabela 2.

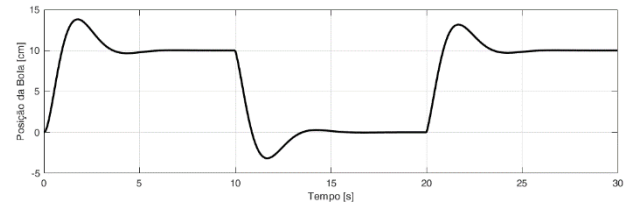
**Tabela 1.** Parâmetros do sistema viga bola

Parâmetro	Grandeza física	Valor
Momento de inércia da bola ( $J_b$ )	$Kg \ m^2$	$14,406 \ 10^{-6}$
Massa da bola ( $m_b$ )	$Kg$	0,11025
Raio do braço do servo ( $r_{br}$ )	$m$	0,145
Raio da bola ( $r_b$ )	$mm$	14
Comprimento da viga ( $L_{viga}$ )	$m$	0,45

**Tabela 2.** Parâmetros do sistema viga bola

Parâmetro	Valor
Ganho do controlador proporcional ( $K_p$ )	1,585
Ganho do controlador integrador ( $K_i$ )	1,2529
Ganho do controlador derivador ( $K_d$ )	0,9878

Inserindo uma entrada cíclica degrau de 10cm com período de 12s obteve a Fig. 5.



**Figura 5.** Resposta transitória do sistema viga bola controlado.

A implementação prática está em desenvolvimento, com constantes mudanças a partir dos testes executados, foram escolhidos inicialmente alguns componentes que não atenderam as necessidades do projeto e posteriormente foram substituídos por algum outro que viesse a ter êxito.

A implementação foi dividida em 4 partes, sendo elas: estrutura, sensor e atuador e controlador.

A confecção da estrutura foi em PLA feita em uma impressora 3d, que possibilitou uma qualidade de prototipagem aliados a resistência e leveza, evitando esforço a mais pelo servo motor.

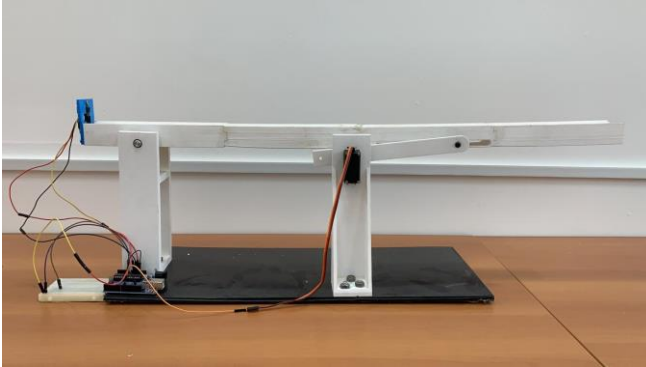
Por facilidade de programação e grande volume de material de pesquisa, foi utilizado o microcontrolador Arduino para realizar um controle proporcional integral derivativo (PID). Além das vantagens do processamento digital do sinal, o microcontrolador proporciona flexibilidade para alterar os ganhos do controlador.

Para obter a posição da esfera, inicialmente foi usado uma fita resistiva de níquel cromo junto com uma esfera de aço, a esfera tocava as linhas condutoras de forma superficial o que não proporcionou força de contato suficiente para a leitura adequada da resistência, como não obteve bons resultados foi realizada a sua substituição por um sensor ultrassônico e uma bola de pingue pongue, que não proporcionou bons resultados devido a extensão da viga que causou interferência na medida, trazendo incertezas nas medições, posteriormente foi implementado um sensor de distância a laser VL5310X, que não proporcionou bons valores. Por fim o componente que obteve melhores resultados foi o sensor infravermelho Sharp GP2Y0A21YK0F, o qual proporcionou uma leitura adequada e rápida.

Para atuar no sistema, variando a angulação da viga foi escolhido um servo motor, que trabalha em corrente contínua, sendo um ótimo atuador para esse projeto já que

pode-se controlar sua angulação de acordo com a necessidade, como também limitá-la para que não venha causar danos à estrutura.

Feito todo processo de construção e também com essas mudanças feitas até o momento, a planta didática demonstrada na Fig.6.



**Figura 6.** Imagem da planta didática.

### Considerações Finais

Foi concluída toda a modelagem do controlador que permitiu a planta projetada ser controlada, entretanto, sua resposta está oscilatória causada por um ruído no sensor de distância. Apesar disso a técnica alocação de polos se mostrou eficiente e atendeu a necessidade de estabilidade mesmo com o problema de ruído na medida.

A implementação sofreu uma parada devido a pandemia de Covid-19, outros atrasados foram causados pelas trocas dos sensores que não atenderam as necessidades seja por precisão, tempo de resposta, repetibilidade da medida e calibração. Pretende-se com o retorno das atividades presenciais concluir o projeto.

### Agradecimentos

Ao IFMS/TL pelo incentivo financeiro de acordo com o Edital 028/2019 - Propi/IFMS.

### Referências

- [1] DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos*: 8. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2001.
- [2] APKARIAN, J; LÉVIS, M; GUROCAK, H. *Ball and beam experiment for Matlab/Simulink users*. Markham: Quanser, 2011.
- [3] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 3ª. ed. São Paulo: Pearson, 2011
- [4] QUANSER. *2D Ball Balancer Control using QUARC: Instructor Manual*. [S.l.]: User manual, 2008